

Venituse iseloomustavad maatriksid ning venituskoefitsientide tuletused

Artur Tamm

20. juuni 2009. a.

1 Võret iseloomustav maatriks ning venitusmaatriksid

Igasugused kristalle on võimalik kirjeldada Bravais' võrega, mis koosneb elementaarrakudest. Kolmemõõtmelise kristalli korral iseloomustatakse rakku kolme võrevektoriga:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z); \quad (1.1)$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z); \quad (1.2)$$

$$\vec{c} = (c_x, c_y, c_z); \quad (1.3)$$

Kristall on invariantne translatsioonide suhtes, mida kirjeldab võrevektoritest moodustatud translatsioonivektor \vec{R}_n , mis saadakse järgnevalt:

$$\vec{R}_n = n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c}, \text{ kus } n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}; \quad (1.4)$$

Elementaarrakku iseloomustav maatriks koostatakse võrevektoritest järgmiselt:

$$R = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix}; \quad (1.5)$$

Kristalli venitusi on võimalik kirjeldada ruutmaatriksiga D , mille dimensiooniks on 3, mis mõjub võret iseloomustavale maatriksile R järgnevalt:

$$R' = R.D; \quad (1.6)$$

Saadud tulemus R' iseloomustab deformeeritud Bravais' võret. Tehe \cdot on maatrikskorrutis.

2 Erinevad deformatsiooni maatriksid

2.1 Võrevektorite suunalised deformatsioonid

Elementaarraku deformatsioone vektorite suunas iseloomustavad järgmised maatriksid[1]:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 + \delta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2.1)$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2.2)$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \delta \end{pmatrix}; \quad (2.3)$$

Maatriksid D_1 , D_2 ning D_3 iseloomustavad vastavalt vektorite \vec{a} , \vec{b} ning \vec{c} suhtelist muutust suuruse δ võrra. Vektorite pikkuse muutus iseloomustab kristallvõre elementaarraku venitust või kokkusurumist kindla võrevektori suunas.

2.2 Elementaarraku deformatsioon, mis tekib võrevektori nihutamisel tema sihis

Maatriksid D_4 , D_5 ning D_6 , mis avalduvad järgmiselt[1]:

$$D_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} & \frac{\delta}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} \\ 0 & \frac{\delta}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} & \frac{1}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} \end{pmatrix}; \quad (2.4)$$

$$D_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} & 0 & \frac{\delta}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} & 0 \\ \frac{\delta}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} \end{pmatrix}; \quad (2.5)$$

$$D_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} & \frac{\delta}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} & 0 \\ \frac{\delta}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} & \frac{1}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} \end{pmatrix}; \quad (2.6)$$

2.3 Võrevektorite suunaline deformatsioon konstantsel elementaarraku ruumalal

Järgnevad maatriksid iseloomustavad deformatsioone vastavate võrevektorite suunas nii, et elementaarraku ruumala jääb samaks[1]:

$$D_7 = \begin{pmatrix} \frac{1+\delta}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\delta}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} \end{pmatrix}; \quad (2.7)$$

$$D_8 = \begin{pmatrix} \frac{1+\delta}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\delta}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} \end{pmatrix}; \quad (2.8)$$

$$D_9 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\delta}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\delta}{\sqrt[3]{1-\delta^2}} \end{pmatrix}; \quad (2.9)$$

2.4 Elastsusmaatriks ning sellest sõltuvad elastsuskoeffitsiendid

Materjali elastsusomadusi kirjeldab elastsusmaatriks, mis on üldiselt 6x6 maatriks. Ortorombiliste kristallide puhul näeb elastsusmaatriks välja järgnevalt:

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1,2} & c_{2,2} & c_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1,3} & c_{2,3} & c_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{5,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{6,6} \end{pmatrix}; \quad (2.10)$$

Lisaks on võimalik viimase maatriksi abil avaldada painduvus maatriksi.

$$S = C^{-1}; \quad (2.11)$$

Viimase kahe maatriksi abil on võimalik leida erinevad elastsuskoeffitsiendid. Leiame kõigepealt elastsusmooduli sõltuvuse suunast.

$$1/K = (s_{1,1} + s_{1,2} + s_{1,3})l_1^2 + (s_{1,2} + s_{2,2} + s_{2,3})l_2^2 + (s_{1,3} + s_{2,3} + s_{3,3})l_3^2; \quad (2.12)$$

Suurused l_1, l_2, l_3 iseloomustava vastava suuna koosinust.

Reussi ja Voigti nihkemoodulid avalduvad järgnevalt:

$$G_R = \frac{15}{4(s_{1,1} + s_{2,2} + s_{3,3}) - 4(s_{1,2} + s_{1,3} + s_{2,3}) + 3(s_{4,4} + s_{5,5} + s_{6,6})}; \quad (2.13)$$

$$G_V = \frac{1}{15}(c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3} - c_{1,2} - c_{1,3} - c_{2,3}) + \frac{1}{5}(c_{4,4} + c_{5,5} + c_{6,6}); \quad (2.14)$$

Reussi ja Voigti elastsusmoodul avalduvad järgmiste valemite kaudu.

$$B_R = \frac{1}{(s_{1,1} + s_{2,2} + s_{3,3}) + 2(s_{1,2} + s_{1,3} + s_{2,3})}; \quad (2.15)$$

$$B_V = \frac{1}{9}(c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3}) + \frac{2}{9}(c_{1,2} + c_{1,3} + c_{2,3}); \quad (2.16)$$

Eelnevatest võrranditest on võimalik avaldada üldise nihke- ning elastsusmooduli järgnevalt:

$$G = \frac{1}{2}(G_R + G_V); \quad (2.17)$$

$$B = \frac{1}{2}(B_R + B_V); \quad (2.18)$$

Toome lisaks välja Youngi mooduli ning Poisson'i suhte.

$$E = \frac{9BG}{3B + G}; \quad (2.19)$$

$$\nu = \frac{3B - 2G}{2(3B + G)}; \quad (2.20)$$

Viimasena toome välja võrrandi, millega on võimalik kirjeldada Youngi mooduli sõltuvust suunast.

$$1/E = l_1^4 s_{1,1} + 2l_1^2 l_2^2 s_{1,2} + 2l_1^2 l_3^2 s_{1,3} + l_2^4 s_{2,2} + 2l_2^2 l_3^2 s_{2,3} + l_3^4 s_{3,3} + l_2^2 l_3^3 s_{4,4} + l_1^2 l_3^2 s_{5,5} + l_1^2 l_2^2 s_{6,6}; \quad (2.21)$$

3 Venituse iseloomustavad elastsuskoeffitsiendid

Eelnevalt kirjeldatud deformatsiooni maatriksitega mõjudes on võimalik leida kristalli energia sõltuvuse elementaarraku muutuste suhtes. Energia muutus on üldjuhul kirjeldatav järgmise võrrandiga:

$$E(V, \delta) = E(V, 0) + V_0 \left(\sum_i \tau_i \xi_i \delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{i,j} \delta_i \xi_i \delta_j \xi_j \right) + O(\delta^3); \quad (3.1)$$

Viimases võrrandis suurus δ iseloomustab defaormatsiooni suurust ning τ on deformatsiooni tensori komponent. Liige $O(\delta^3)$ iseloomustab Taylori rea kolmandat järku väikeseid suurusi, mida antud lähnduses ei arvetstata. Suurus ξ omandab järgnevaid väärtusi.

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{kui } i \in \{1, 2, 3\} \\ 2 & \text{kui } i \in \{4, 5, 6\} \end{cases}; \quad (3.2)$$

Põhimõtteliselt on arvatatud tulemused lähendatavad järgmisele võrrandiga.

$$f(\delta) = \alpha + \beta\delta + \gamma\delta^2; \quad (3.3)$$

Lisaks elementaarraku muutusest tingitud energia muutusele tuleb arvestada raku ruumalast tingitud muutusega $E(V, 0)$. Võttes viimasest võrrandist teist järku osatuletise δ_i järgi taandub viimane probleem välja ning saame võrandi:

$$\gamma_i = V_0 c_{i,i} \quad (3.4)$$

Viimase võrandiga on võimalik kätte saada kõik paarisindeksitega elastsuskoeffitsiendid $c_{1,1}, c_{2,2}, c_{3,3}, c_{4,4}, c_{5,5}$ ning $c_{6,6}$.

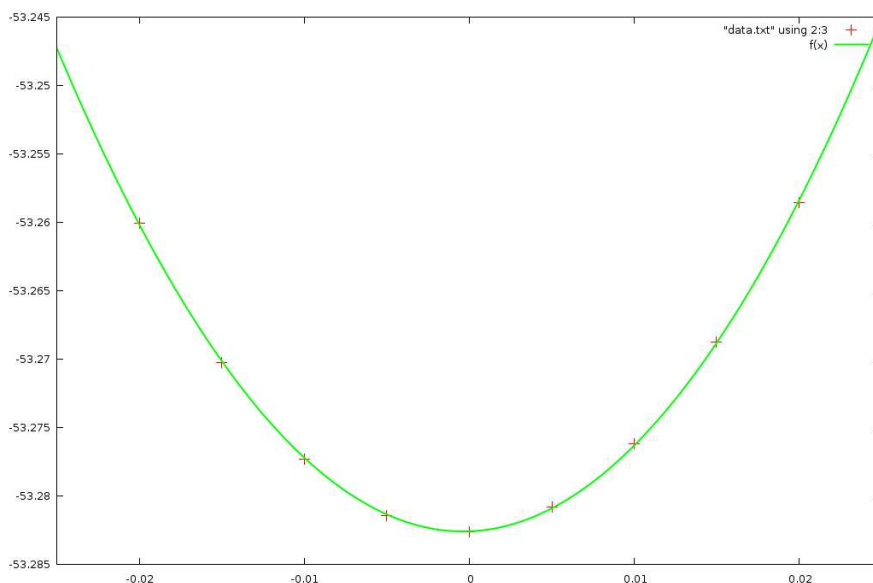
4 Arvutuslikud tulemused, graafikud ja koefitsiendid

4.1 Venitusmaatriks D_1

Venitusmaatriksi D_1 abil on võimalik leida elastsuskoeffitsient $c_{1,1}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + V_0 \tau_1 \delta + V_0 \frac{c_{1,1}}{2} \delta^2; \quad (4.1)$$

Viimast võrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 1: Arvutuspunktid maatriksi D_1 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 1: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-53.2825827489177257
β	0.0448333333334243259
γ	58.206493506479226

Arvestades, et $V_0 = 85.962A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{1,1}$ väärtuse.

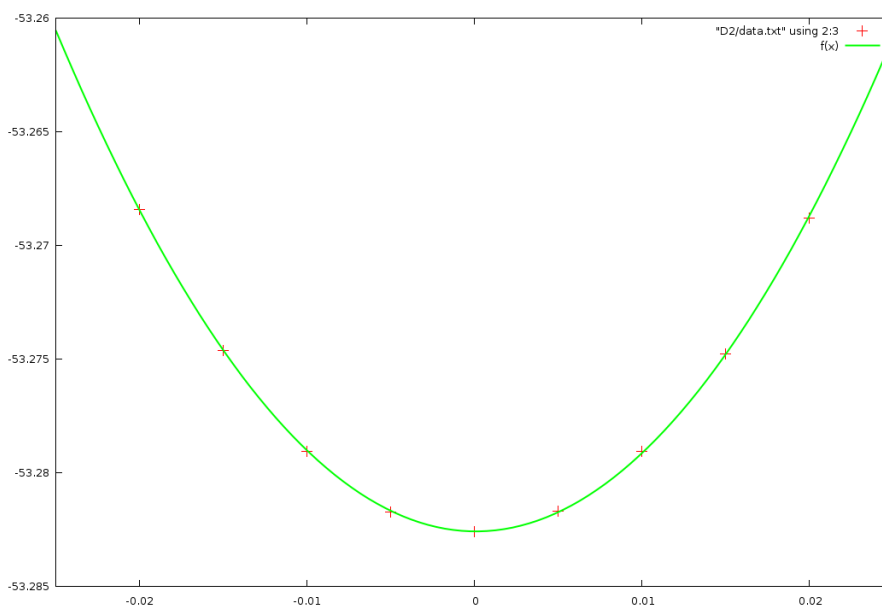
$$c_{1,1} = 216.9729051 \text{ GPa}; \quad (4.2)$$

4.2 Venitusmaatriks D_2

Venitusmaatriksi D_2 abil on võimalik leida elastsuskoeffitsient $c_{2,2}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + V_0 \tau_2 \delta + V_0 \frac{c_{2,2}}{2} \delta^2; \quad (4.3)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 2: Arvutuspunktid maatriksi D_2 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 2: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-53.2825775324675206
β	-0.0066666666666620103696
γ	34.938528138493332

Arvestades, et $V_0 = 85.962A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{2,2}$ väärtuse.

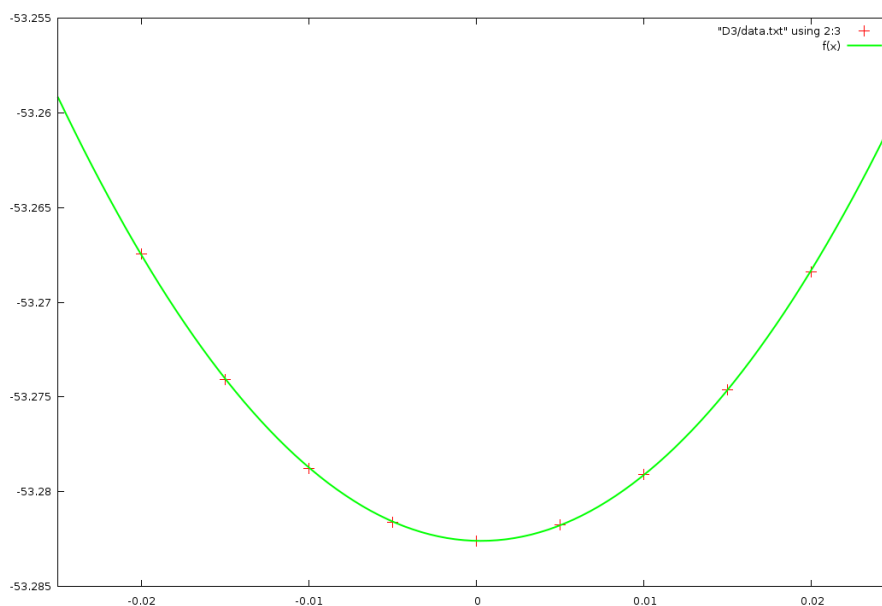
$$c_{2,2} = 130.23828 \text{ GPa} \quad (4.4)$$

4.3 Venitusmaatriks D_3

Venitusmaatriksi D_3 abil on võimalik leida elastsuskoeffitsient $c_{3,3}$ järgnevalt võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + V_0 \tau_3 \delta + V_0 \frac{c_{3,3}}{2} \delta^2; \quad (4.5)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 3: Arvutuspunktid maatriksi D_3 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 3: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-53.2825912554112548
β	-0.0199333333329102247
γ	36.634199134150115

Arvestades, et $V_0 = 85.962A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{3,3}$ väärtuse.

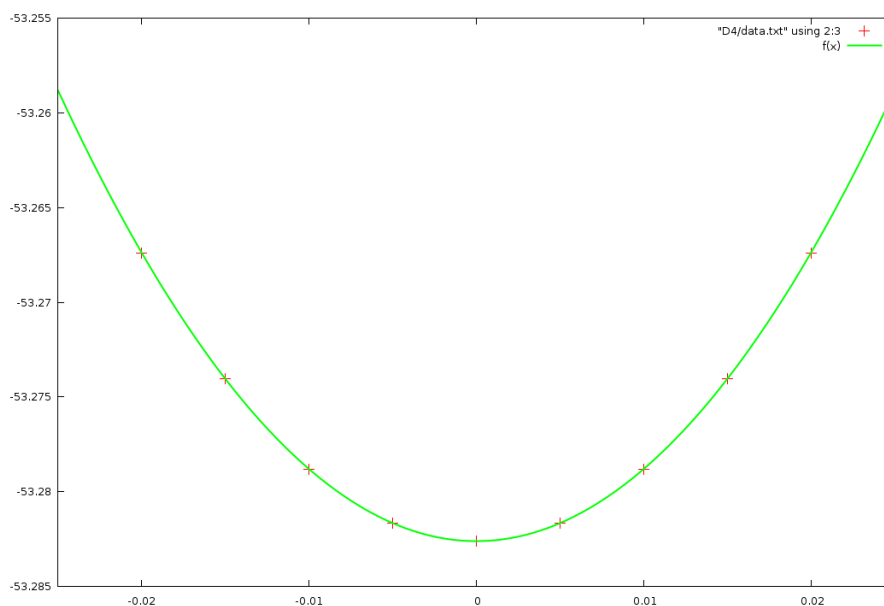
$$c_{3,3} = 136.5591386 \text{ GPa} \quad (4.6)$$

4.4 Venitusmaatriks D_4

Venitusmaatriksi D_4 abil on võimalik leida elastsuskoefitsient $c_{4,4}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + 2V_0 \tau_4 \delta + 2V_0 c_{4,4} \delta^2; \quad (4.7)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 4: Arvutuspunktid maatriksi D_4 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 4: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-53.2826088744588660
β	-0.00004999999995657918520
γ	38.036580086546791

Arvestades, et $V_0 = 85.962A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{4,4}$ väärtuse.

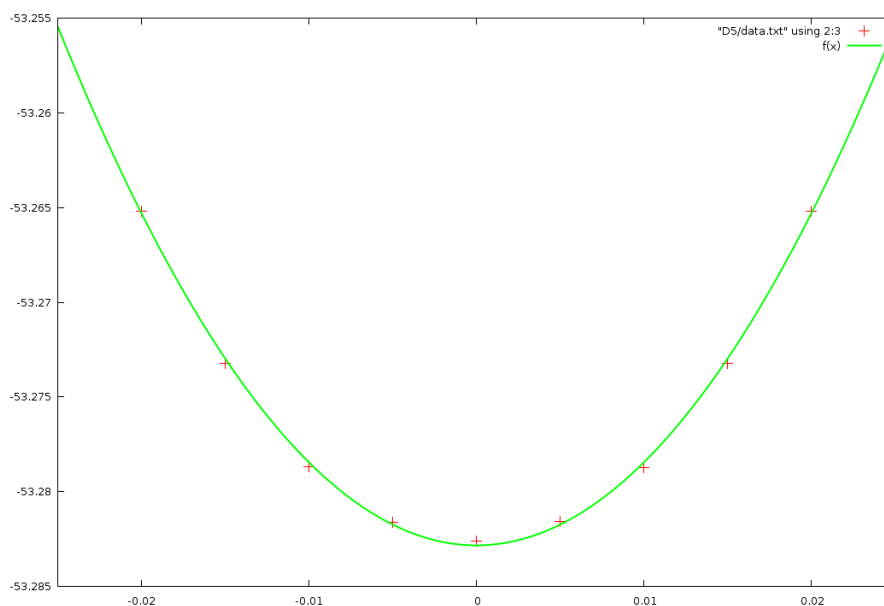
$$c_{4,4} = 35.44667779 \text{ GPa} \quad (4.8)$$

4.5 Venitusmaatriks D_5

Venitusmaatriksi D_5 abil on võimalik leida elastsuskoefitsient $c_{5,5}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + 2V_0 \tau_5 \delta + 2V_0 c_{5,5} \delta^2; \quad (4.9)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 5: Arvutuspunktid maatriksi D_5 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 5: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-53.2828307359307232
β	-0.0004333333333186570449
γ	43.7177489177370120

Arvestades, et $V_0 = 85.962A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{5,5}$ väärtuse.

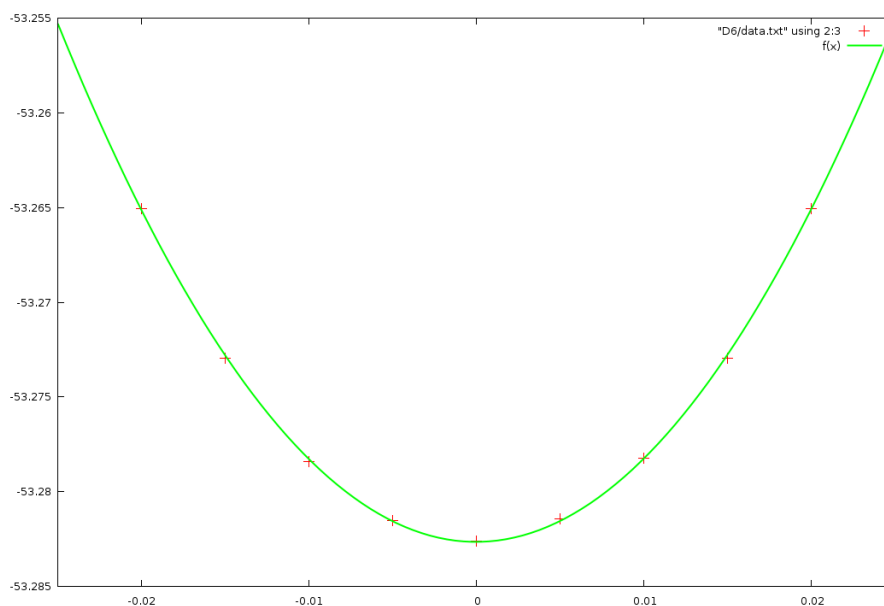
$$c_{5,5} = 40.74101711 \text{ GPa} \quad (4.10)$$

4.6 Venitusmaatriks D_6

Venitusmaatriksi D_6 abil on võimalik leida elastsuskoeffitsient $c_{6,6}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + 2V_0 \tau_6 \delta + 2V_0 c_{6,6} \delta^2; \quad (4.11)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 6: Arvutuspunktid maatriksi D_6 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 6: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-53.2826472943722891
β	0.00115000000053087914
γ	43.7504329003781578

Arvestades, et $V_0 = 85.962A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{6,6}$ väärtuse.

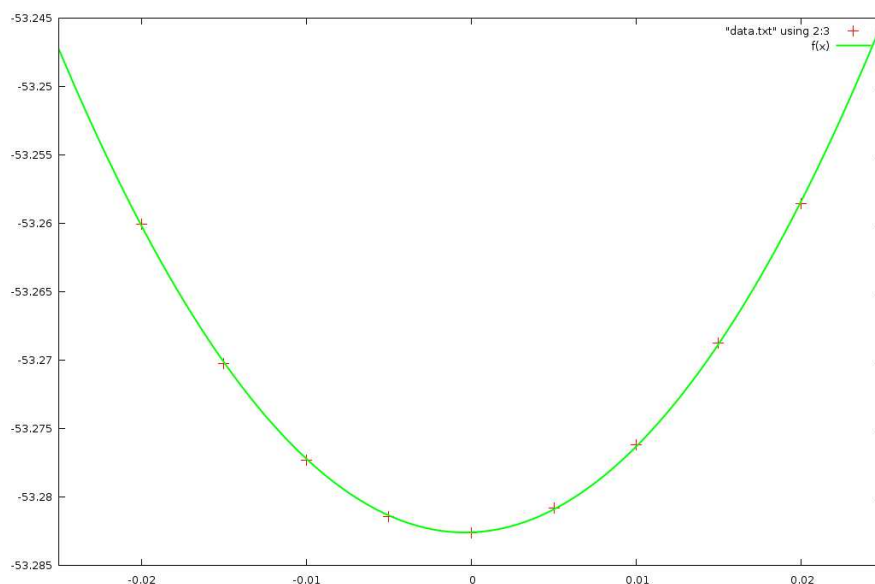
$$c_{6,6} = 40.77147563 \text{ GPa} \quad (4.12)$$

4.7 Venitusmaatriks D_7

Venitusmaatriksi D_7 abil on võimalik leida elastsuskoeffitsient $c_{1,2}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + V_0 (\tau_1 - \tau_2)\delta + \frac{1}{2}V_0 (c_{1,1} + c_{2,2} - 2c_{1,2}) \delta^2; \quad (4.13)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 7: Arvutuspunktid maatriksi D_7 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 7: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-53.2825700595238203
β	0.0522499999995505865
γ	57.7595238096163897

Arvestades, et $V_0 = 85.962A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{1,2}$ väärtuse.

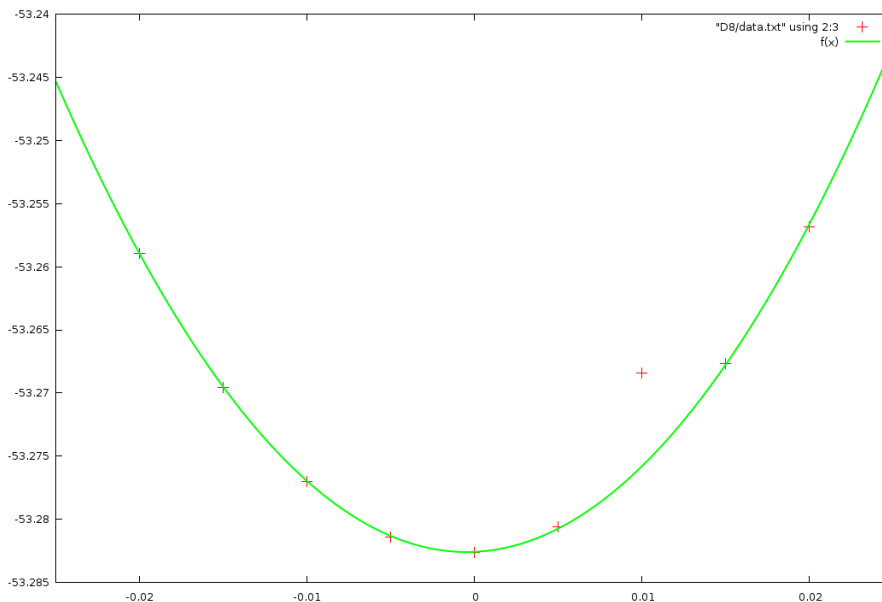
$$c_{1,2} = 65.95221430 \text{ GPa} \quad (4.14)$$

4.8 Venitusmaatriks D_8

Venitusmaatriksi D_8 abil on võimalik leida elastsuskoefitsient $c_{1,3}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + V_0 (\tau_1 - \tau_3)\delta + \frac{1}{2}V_0 (c_{1,1} + c_{3,3} - 2c_{1,3})\delta^2; \quad (4.15)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 8: Arvutuspunktid maatriksi D_8 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 8: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-53.2825792136150369
β	0.0575613940050676634
γ	61.8030877573118147

Arvestades, et $V_0 = 85.962A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{1,3}$ väärtuse.

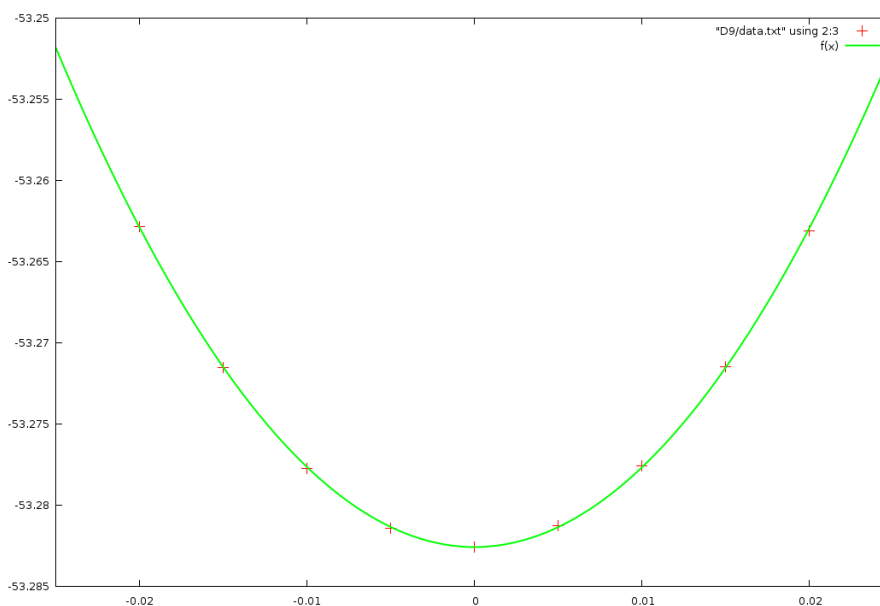
$$c_{1,3} = 61.57616340 \text{ GPa} \quad (4.16)$$

4.9 Venitusmaatriks D_9

Venitusmaatriksi D_9 abil on võimalik leida elastsuskoefitsient $c_{2,3}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + V_0 (\tau_2 - \tau_3)\delta + \frac{1}{2}V_0 (c_{2,2} + c_{3,3} - 2c_{2,3})\delta^2; \quad (4.17)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 9: Arvutuspunktid maatriksi D_9 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 9: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-53.2825716450216476
β	-0.00174999999918164987
γ	49.0465367964679615

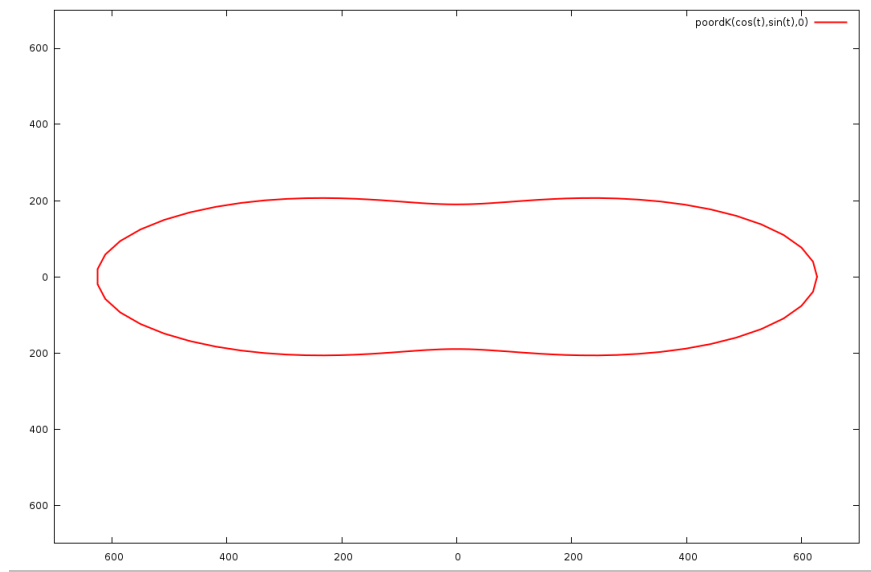
Arvestades, et $V_0 = 85.962A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{2,3}$ väärtuse.

$$c_{2,3} = 41.98477440 \text{ GPa} \quad (4.18)$$

4.10 Elastsusmooduli sõltuvus suunast

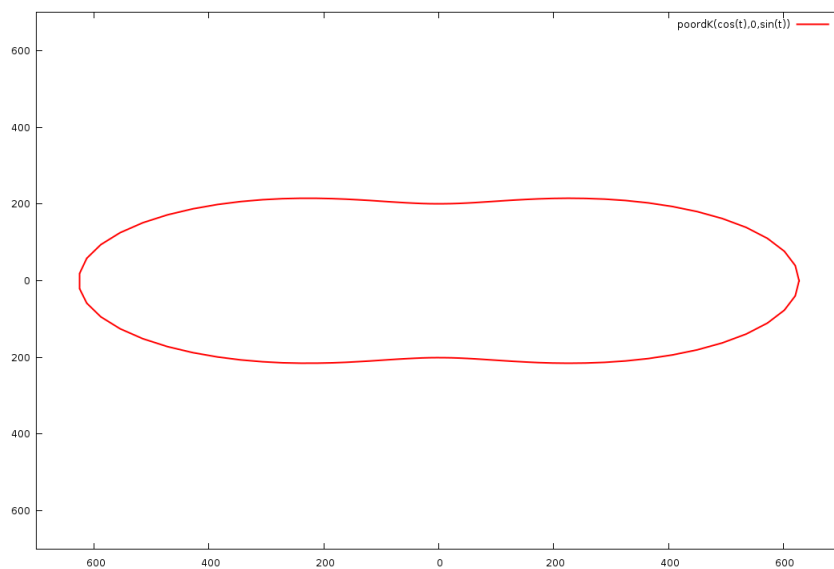
Vastavalt võrrandile on võimalik leida elastsusmooduli sõltuvuse suunast. Toome siinkohal välja vaid graafikud. Esimesed kolm kirjeldavad projektsioone kolmele tasandile (a-b, a-c, b-c) ning neljas on kolmemõõtmeline graafik.

4.10.1 Projektsioon a b tasandile



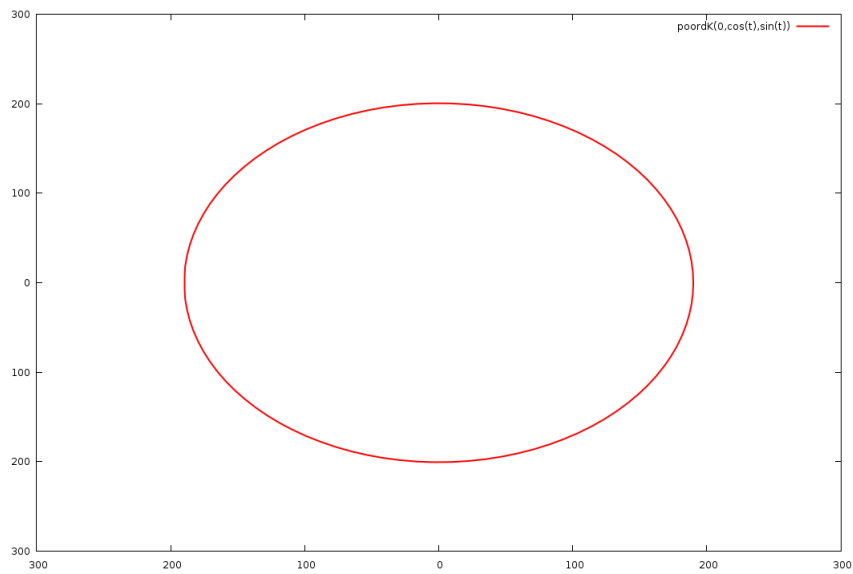
Joonis 10: Elastusmooduli projektsioon vektoritega \vec{a} ning \vec{b} määratud tasandile

4.10.2 Projektsioon a c tasandile



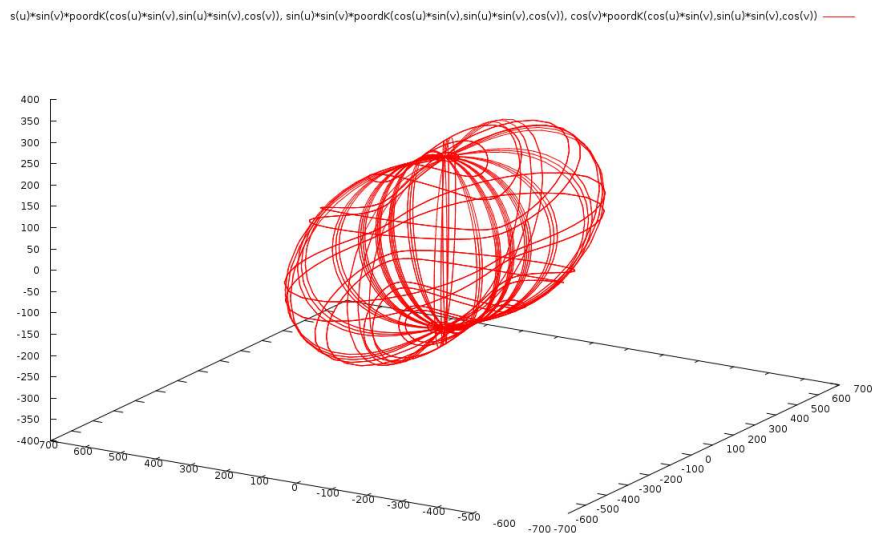
Joonis 11: Elastusmooduli projektsioon vektoritega \vec{a} ning \vec{c} määratud tasandile

4.10.3 Projektsioon b c tasandile



Joonis 12: Elastusmooduli projektsioon vektoritega \vec{b} ning \vec{c} määratud tasandile

4.10.4 Kolmemõõtmiline joonis



Joonis 13: Elastusmooduli sõltuvus suunast kolmemõõtmeline joonis

4.11 Nihke- ning elastsusmoodulid

Vastavalt eelpool defineeritud valemitele saame Reussi ja Voigti elastsus- ning nihkemooduliteks järgmised väärtused.

Nihkemoodul:

$$G_R = 42.52549886GPa; \quad (4.19)$$

$$G_V = 44.34231261GPa; \quad (4.20)$$

Elastsusmoodul:

$$B_R = 84.43446201GPa; \quad (4.21)$$

$$B_V = 91.42184823GPa; \quad (4.22)$$

Üldine nihke- ning elastsusmoodul:

$$G = 43.43390574GPa; \quad (4.23)$$

$$B = 87.92815510GPa; \quad (4.24)$$

Youngi moodul ning Poisson suhe:

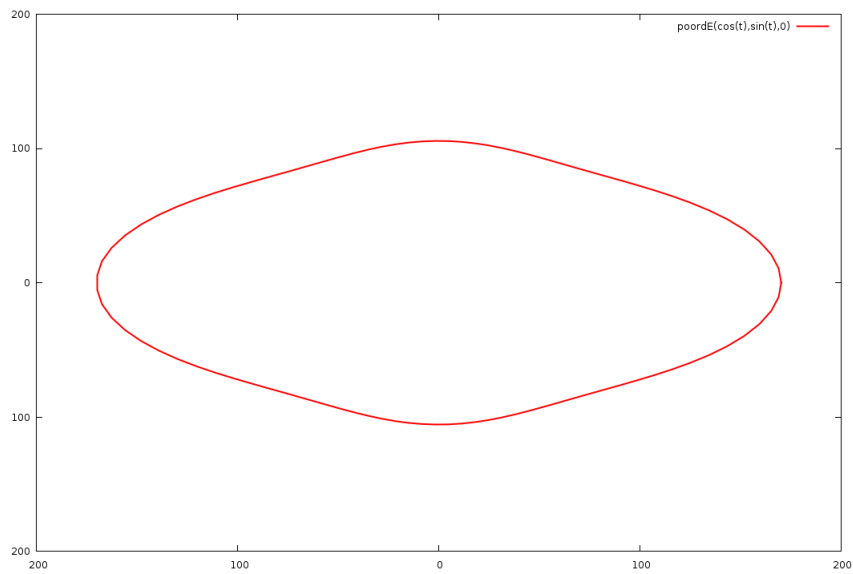
$$E = 111.8799266GPa; \quad (4.25)$$

$$\nu = 0.2879330640; \quad (4.26)$$

4.12 Youngi mooduli sõltuvus suunast

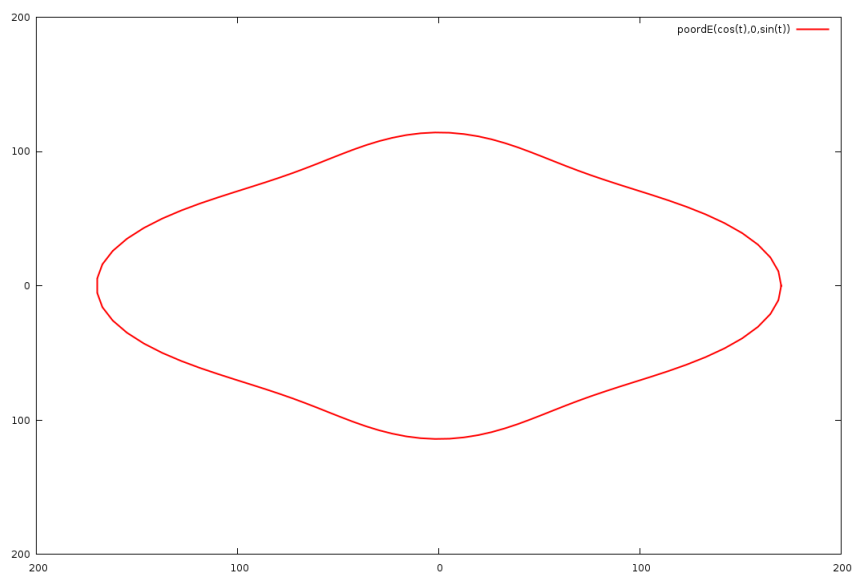
Järgnevalt toome sarnaselt elastsusmooduliga välja neli graafikut, mis iseloomustavad Youngi mooduli sõltuvust suunast.

4.12.1 Projektsioon a b tasandile



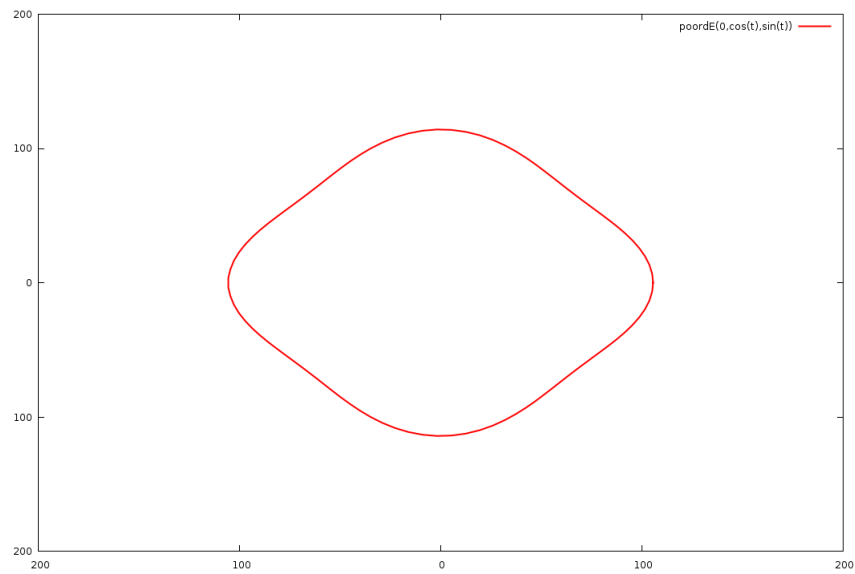
Joonis 14: Youngi mooduli projektsioon vektoritega \vec{a} ning \vec{b} määratud tasandile

4.12.2 Projektsioon a c tasandile



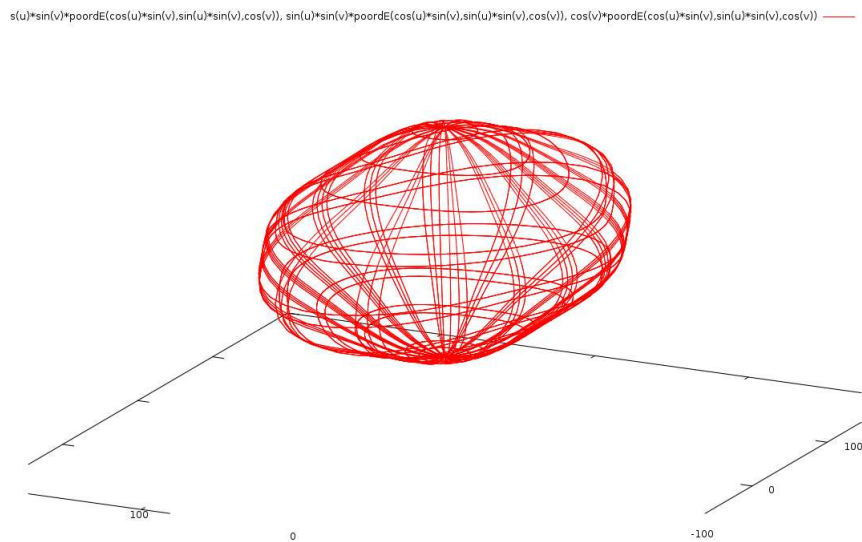
Joonis 15: Youngi mooduli projektsioon vektoritega \vec{a} ning \vec{c} määratud tasandile

4.12.3 Projektsioon b c tasandile



Joonis 16: Youngi mooduli projektsioon vektoritega \vec{b} ning \vec{c} määratud tasandile

4.12.4 Kolmemõõtmiline joonis



Joonis 17: Youngi mooduli sõltuvus suunast kolmemõõtmeline joonis

4.13 Tasakaalutingimused ning venituskoefitsiendid

Venituskoefitsientide tasakaalutingimusi iseloomustavad järgnevad võrrandid[].

$$(c_{1,1} + c_{2,2} - 2c_{1,2}) > 0; \quad (4.27)$$

$$(c_{1,1} + c_{3,3} - 2c_{1,3}) > 0; \quad (4.28)$$

$$(c_{2,2} + c_{3,3} - 2c_{2,3}) > 0; \quad (4.29)$$

$$c_{1,1} > 0; \quad c_{2,2} > 0; \quad c_{3,3} > 0; \quad (4.30)$$

$$c_{4,4} > 0; \quad c_{5,5} > 0; \quad c_{6,6} > 0;$$

$$(c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3} + 2c_{1,2} + 2c_{1,3} + 2c_{3,3}) > 0; \quad (4.31)$$

Lisaks vaatleme tingimust elastsusmooduli ja venituskoefitsientide jaoks.

$$\frac{1}{3}(c_{1,2} + c_{1,3} + c_{2,3}) < B_0 < \frac{1}{3}(c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3}); \quad (4.32)$$

On näha, et venituskoefitsientide positiivsuse tingimus on täidetud, toome ka tulemused ülejäänud võrratuste jaoks. Tulemuste ühikuteks on GPa.

$$(c_{1,1} + c_{2,2} - 2c_{1,2}) = 215.3; \quad (4.33)$$

$$(c_{1,1} + c_{3,3} - 2c_{1,3}) = 230.4; \quad (4.34)$$

$$(c_{2,2} + c_{3,3} - 2c_{2,3}) = 182.8; \quad (4.35)$$

$$(c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3} + 2c_{1,2} + 2c_{1,3} + 2c_{3,3}) = 822.8; \quad (4.36)$$

$$\frac{1}{3}(c_{1,2} + c_{1,3} + c_{2,3}) = 56.5; \quad (4.37)$$

$$B_0 = 87.9; \quad (4.38)$$

$$\frac{1}{3}(c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3}) = 161.3; \quad (4.39)$$

5 Viited

Viited

- [1] P. Ravindran, *et al.*, *J. Appl. Phys.* **84**, 4891 (1998).