

Venituskoefitsientide tuletused

Artur Tamm

20. juuni 2009. a.

1 Arvutuslikud tulemused, graafikud ja koefitsiendid

Käesolevas töös ei hakka uuesti teooriat läbi tegema, kuna vastav töö on läbiviidud Li_2FeSiO_4 venituse käsitlevas dokumendis.

1.1 Venitusmaatriks D_1

Venitusmaatriksi D_1 abil on võimalik leida elastsuskoefitsient $c_{1,1}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + V_0 \tau_1 \delta + V_0 \frac{c_{1,1}}{2} \delta^2; \quad (1.1)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.

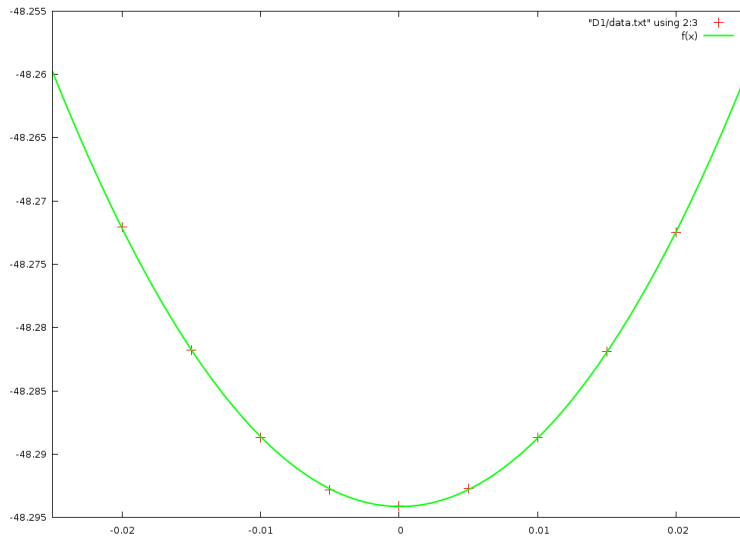
Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 1: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-48.2941444047619086
β	-0.006096666666602957669
γ	54.7047619046911748

Arvestades, et $V_0 = 87.33455A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{1,1}$ väärtuse.

$$c_{1,1} = 200.7149046 \text{ GPa}; \quad (1.2)$$



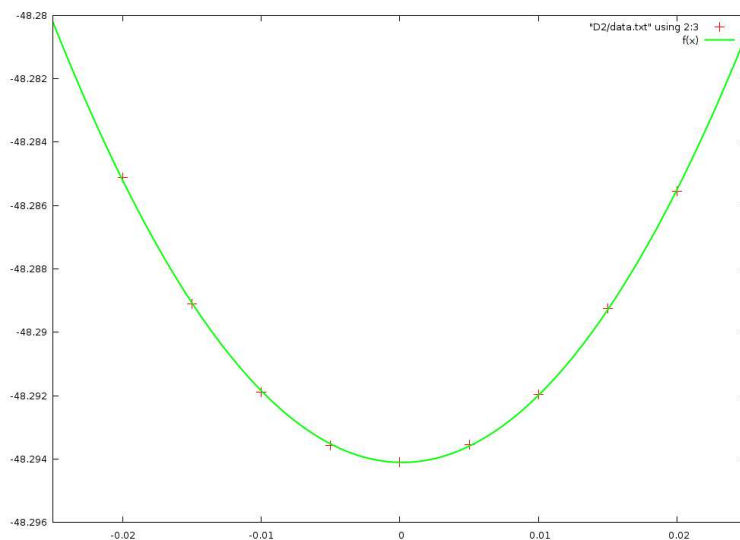
Joonis 1: Arvutuspunktid matriksi D_1 jaoks, venitusel 2%

1.2 Venitusmaatriks D_2

Venitusmaatriksi D_2 abil on võimalik leida elastsuskoeffitsient $c_{2,2}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + V_0 \tau_2 \delta + V_0 \frac{c_{2,2}}{2} \delta^2; \quad (1.3)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 2: Arvutuspunktid matriksi D_2 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 2: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-48.2941072532467501
β	-0.00716333333291644878
γ	21.9238528138212239

Arvestades, et $V_0 = 87.33455A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{2,2}$ väärtuse.

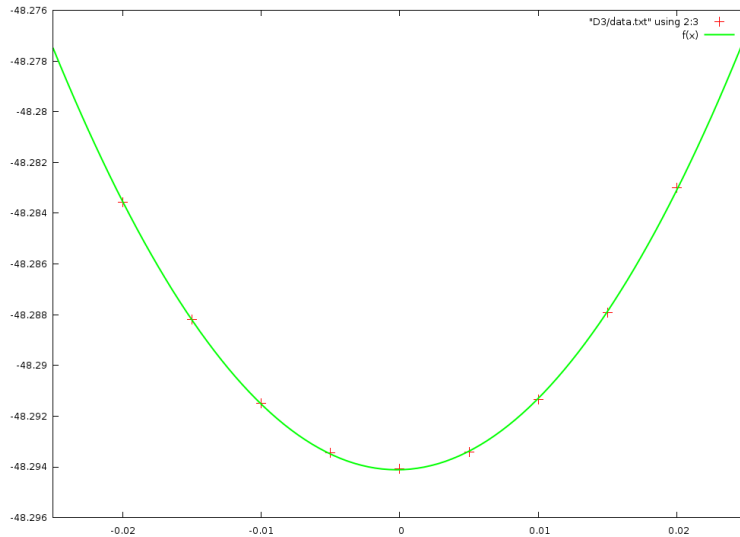
$$c_{2,2} = 80.43987162 \text{ GPa} \quad (1.4)$$

1.3 Venitusmaatriks D_3

Venitusmaatriksi D_3 abil on võimalik leida elastsuskoeffitsient $c_{3,3}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + V_0 \tau_3 \delta + V_0 \frac{c_{3,3}}{2} \delta^2; \quad (1.5)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 3: Arvutuspunktid maatriksi D_3 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Arvestades, et $V_0 = 87.33455A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{3,3}$ väärtuse.

$$c_{3,3} = 99.19431350 \text{ GPa} \quad (1.6)$$

Tabel 3: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

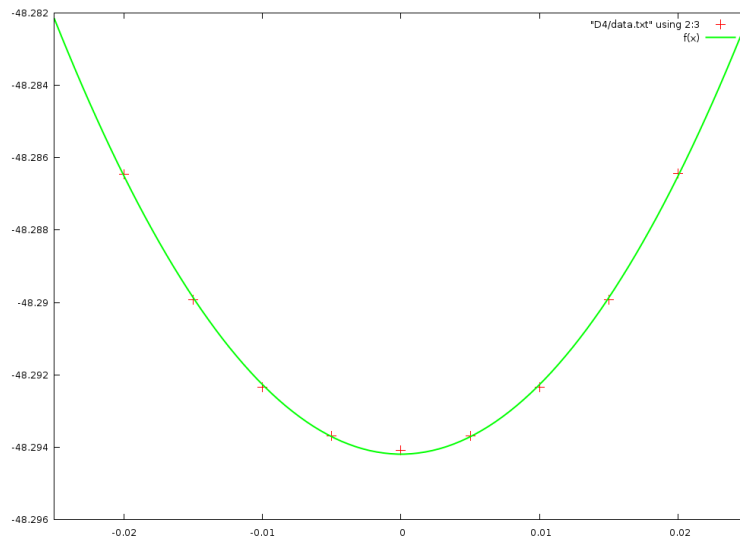
Koefitsient	Väärtus
α	-48.2941127835497852
β	0.0115666666670933213
γ	27.0353679653103214

1.4 Venitusmaatriks D_4

Venitusmaatriksi D_4 abil on võimalik leida elastsuskoefitsient $c_{4,4}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + 2V_0 \tau_4 \delta + 2V_0 c_{4,4} \delta^2; \quad (1.7)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 4: Arvutuspunktid maatriksi D_4 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 4: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-48.2941893593073530
β	0.0000416666672246759857
γ	19.2424891774283182

Arvestades, et $V_0 = 87.33455A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{4,4}$ väärtuse.

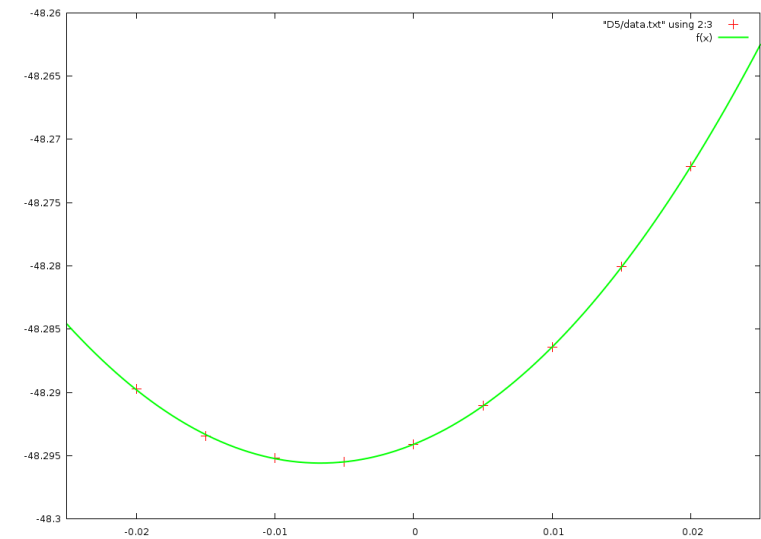
$$c_{4,4} = 17.65044872 \text{ GPa} \quad (1.8)$$

1.5 Venitusmaatriks D_5

Venitusmaatriksi D_5 abil on võimalik leida elastsuskoeffitsient $c_{5,5}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + 2V_0 \tau_5 \delta + 2V_0 c_{5,5} \delta^2; \quad (1.9)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 5: Arvutuspunktid maatriksi D_5 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 5: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-48.2941047380952284
β	0.441903333333802606
γ	32.8780952380534188

Arvestades, et $V_0 = 87.33455A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{5,5}$ väärtuse.

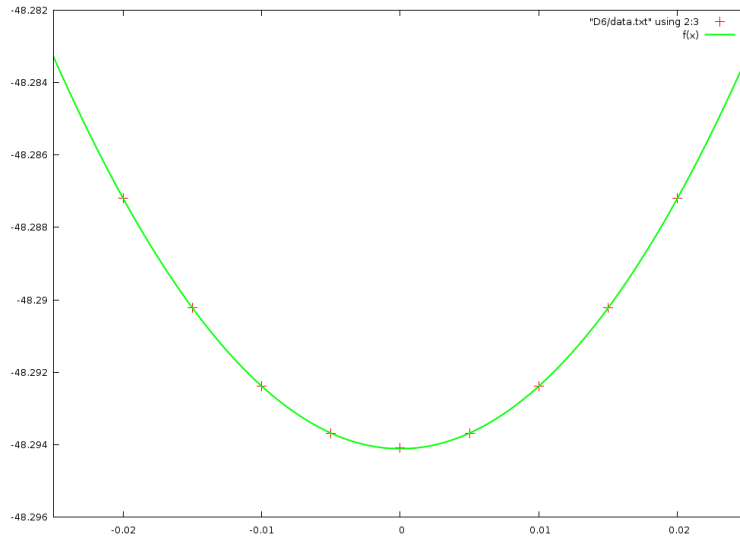
$$c_{5,5} = 30.15790363 \text{ GPa} \quad (1.10)$$

1.6 Venitusmaatriks D_6

Venitusmaatriksi D_6 abil on võimalik leida elastsuskoeffitsient $c_{6,6}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + 2V_0 \tau_6 \delta + 2V_0 c_{6,6} \delta^2; \quad (1.11)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 6: Arvutuspunktid maatriksi D_6 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 6: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-48.2941126515151282
β	-0.0000133333330391110282
γ	17.3009090908788821

Arvestades, et $V_0 = 87.33455A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{6,6}$ väärtuse.

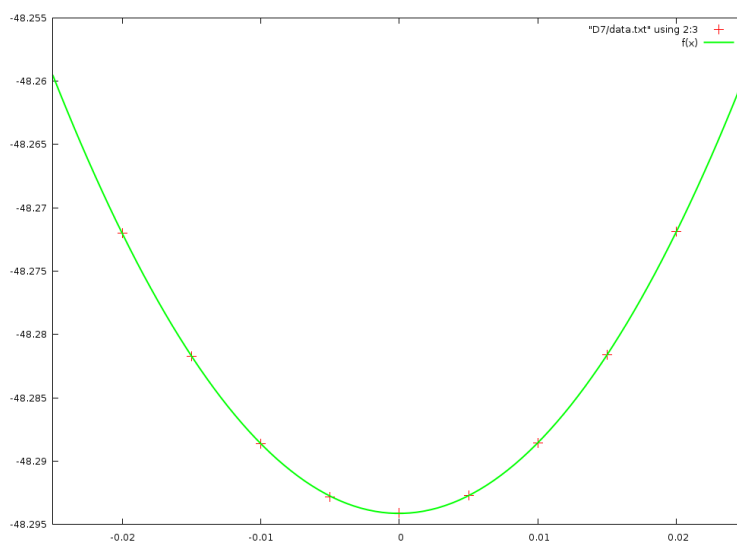
$$c_{6,6} = 15.86950659 \text{ GPa} \quad (1.12)$$

1.7 Venitusmaatriks D_7

Venitusmaatriksi D_7 abil on võimalik leida elastsuskoeffitsient $c_{1,2}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + V_0 (\tau_1 - \tau_2)\delta + \frac{1}{2}V_0 (c_{1,1} + c_{2,2} - 2c_{1,2}) \delta^2; \quad (1.13)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 7: Arvutuspunktid maatriksi D_7 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 7: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-48.2941348116883162
β	0.00393500000041539354
γ	55.4948701298217699

Arvestades, et $V_0 = 87.33455A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{1,2}$ väärtuse.

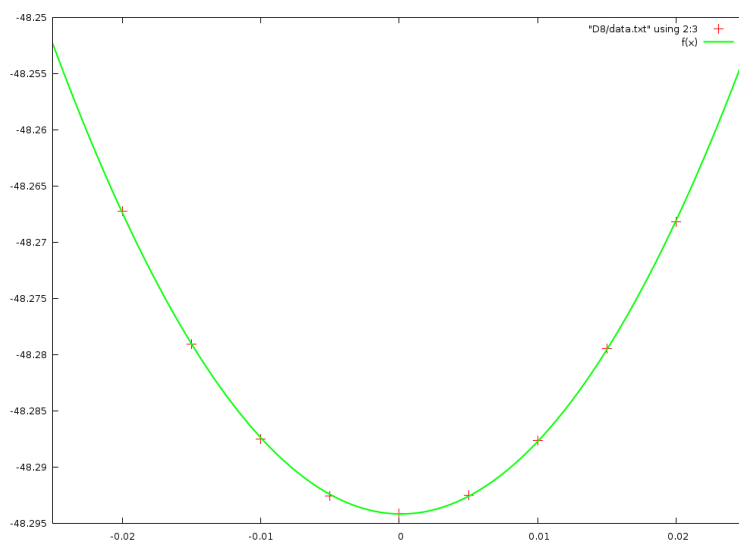
$$c_{1,2} = 38.77045961 \text{ GPa} \quad (1.14)$$

1.8 Venitusmaatriks D_8

Venitusmaatriksi D_8 abil on võimalik leida elastsuskoeffitsient $c_{1,3}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + V_0 (\tau_1 - \tau_3)\delta + \frac{1}{2}V_0 (c_{1,1} + c_{3,3} - 2c_{1,3}) \delta^2; \quad (1.15)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 8: Arvutuspunktid maatriksi D_8 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 8: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-48.2941575735930613
β	-0.0164399999996569963
γ	66.1884415584034542

Arvestades, et $V_0 = 87.33455A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{1,3}$ väärtuse.

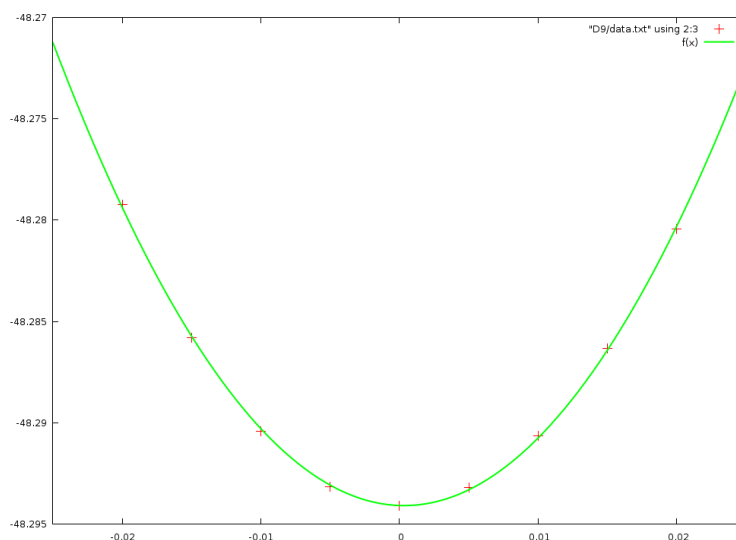
$$c_{1,3} = 28.53001765 \text{ GPa} \quad (1.16)$$

1.9 Venitusmaatriks D_9

Venitusmaatriksi D_9 abil on võimalik leida elastsuskoeffitsient $c_{2,3}$ järgnevast võrrandist.

$$E(V, \delta) = E(V_0, 0) + V_0 (\tau_2 - \tau_3)\delta + \frac{1}{2}V_0 (c_{2,2} + c_{3,3} - 2c_{2,3}) \delta^2; \quad (1.17)$$

Viimast võrrandit on võimalik lähendada funktsiooniga $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Toome järgnevalt välja vastava graafiku.



Joonis 9: Arvutuspunktid maatriksi D_9 jaoks, venitusel 2%

Ning funktsiooni $f(x)$ sobitatud koefitsiendid.

Tabel 9: Sobitatud funktsiooni $f(x)$ koefitsiendid koos veaga

Koefitsient	Väärtus
α	-48.2940824350649294
β	-0.0229016666665178351
γ	35.6246103895911403

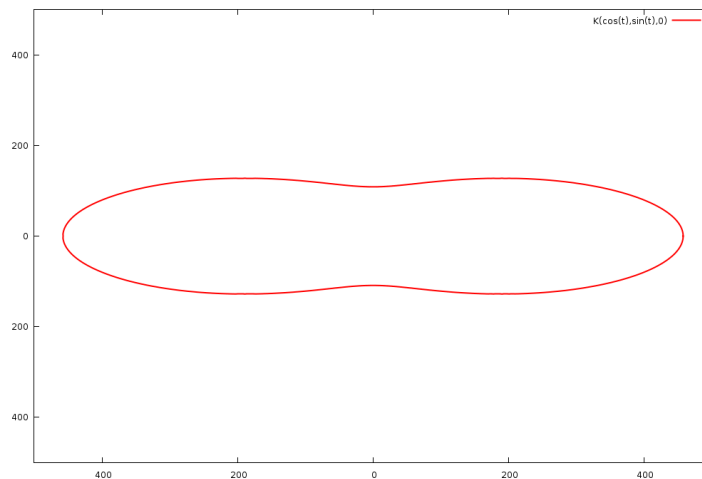
Arvestades, et $V_0 = 87.33455A^3$ on võimalik leida suuruse $c_{2,3}$ väärtuse.

$$c_{2,3} = 24.46272461 \text{ GPa} \quad (1.18)$$

1.10 Elastusmooduli sõltuvus suunast

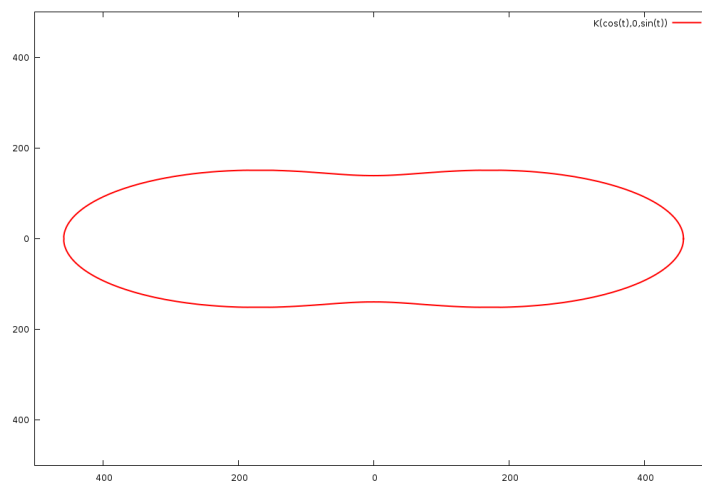
Vastavalt võrrandile on võimalik leida elastusmooduli sõltuvuse suunast. Toome siinkohal välja vaid graafikud. Esimesed kolm kirjeldavad projektsioone kolmele tasandile (a-b, a-c, b-c) ning neljas on kolmemõõtmeline graafik.

1.10.1 Projektsioon a b tasandile



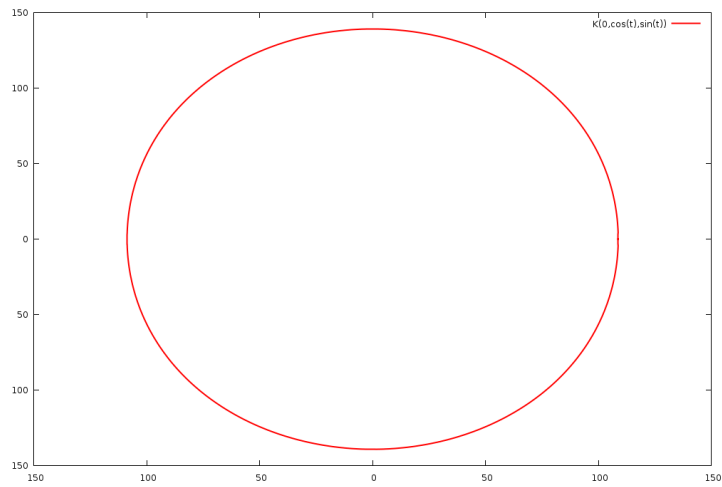
Joonis 10: Elastusmooduli projektsioon vektoritega \vec{a} ning \vec{b} määratud tasandile

1.10.2 Projektsioon a c tasandile



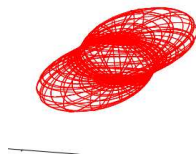
Joonis 11: Elastusmooduli projektsioon vektoritega \vec{a} ning \vec{c} määratud tasandile

1.10.3 Projektsioon b c tasandile



Joonis 12: Elastusmooduli projektsioon vektoritega \vec{b} ning \vec{c} määratud tasandile

1.10.4 Kolmemõõtmeline joonis



Joonis 13: Elastusmooduli sõltuvus suunast kolmemõõtmeline joonis

1.11 Nihke- ning elastsusmoodulid

Vastavalt eelpool defineeritud valemitele saame Reussi ja Voigti elastsus- ning nihkemooduliteks järgmised väärtused.

Nihkemoodul:

$$G_R = 24.66597291GPa; \quad (1.19)$$

$$G_V = 31.97463098GPa; \quad (1.20)$$

Elastsusmoodul:

$$B_R = 53.86802270GPa; \quad (1.21)$$

$$B_V = 62.65283261GPa; \quad (1.22)$$

Üldine nihke- ning elastsusmoodul:

$$G = 28.32030194GPa; \quad (1.23)$$

$$B = 58.26042765GPa; \quad (1.24)$$

Youngi moodul ning Poisson suhe:

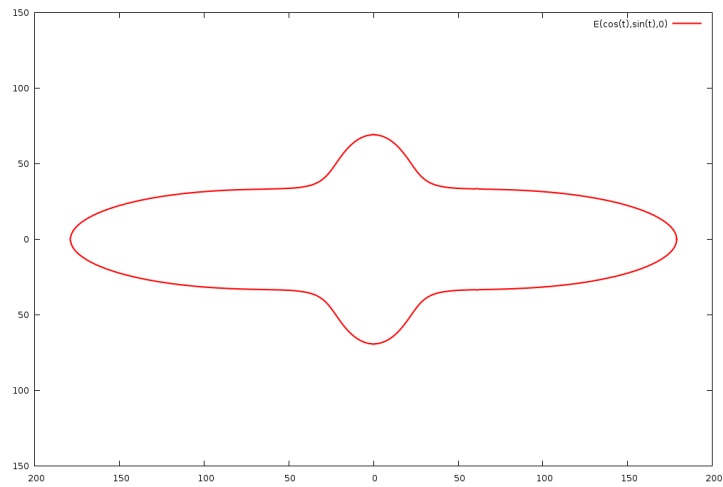
$$E = 73.11403369GPa; \quad (1.25)$$

$$\nu = 0.2908413520; \quad (1.26)$$

1.12 Youngi mooduli sõltuvus suunast

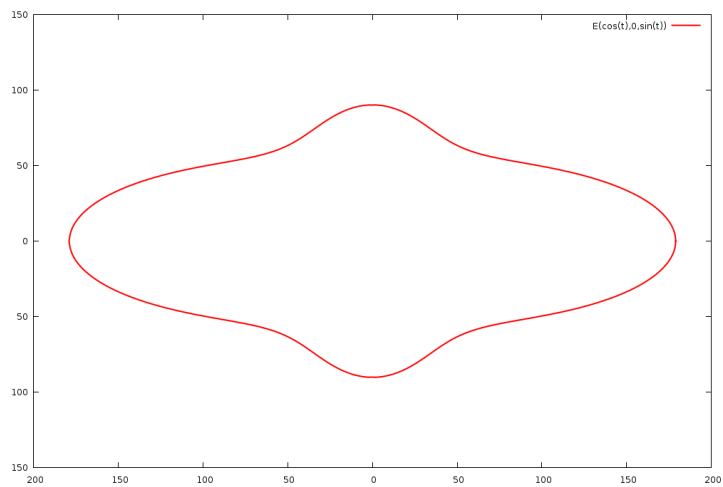
Järgnevalt toome sarnaselt elastsusmooduliga välja neli graafikut, mis iseloomustavad Youngi mooduli sõltuvust suunast.

1.12.1 Projektsioon a b tasandile



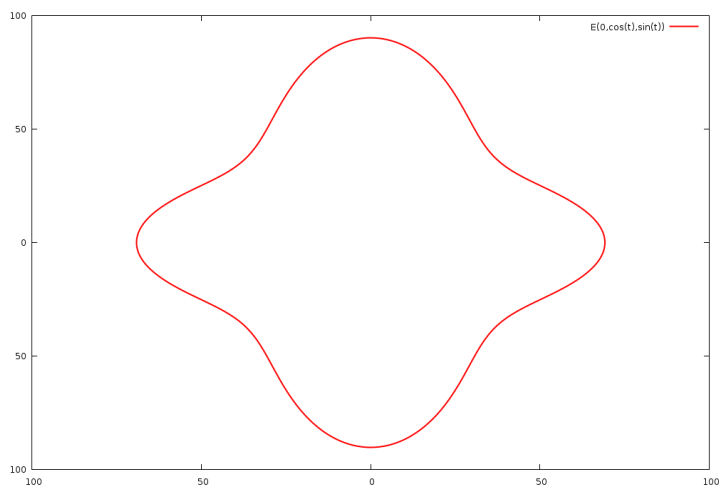
Joonis 14: Youngi mooduli projektsioon vektoritega \vec{a} ning \vec{b} määratud tasandile

1.12.2 Projektsioon a c tasandile



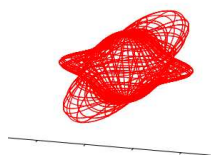
Joonis 15: Youngi mooduli projektsioon vektoritega \vec{a} ning \vec{c} määratud tasandile

1.12.3 Projektsioon b c tasandile



Joonis 16: Youngi mooduli projektsioon vektoritega \vec{b} ning \vec{c} määratud tasandile

1.12.4 Kolmemõõtmeline joonis



Joonis 17: Youngi mooduli sõltuvus suunast kolmemõõtmeline joonis

1.13 Tasakaalutingimused ning venituskoefitsiendid

Venituskoefitsientide taskaalutingimusi iseloomustavad järgnevad võrrandid[].

$$(c_{1,1} + c_{2,2} - 2c_{1,2}) > 0; \quad (1.27)$$

$$(c_{1,1} + c_{3,3} - 2c_{1,3}) > 0; \quad (1.28)$$

$$(c_{2,2} + c_{3,3} - 2c_{2,3}) > 0; \quad (1.29)$$

$$c_{1,1} > 0; \quad c_{2,2} > 0; \quad c_{3,3} > 0; \quad (1.30)$$

$$c_{4,4} > 0; \quad c_{5,5} > 0; \quad c_{6,6} > 0;$$

$$(c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3} + 2c_{1,2} + 2c_{1,3} + 2c_{2,3}) > 0; \quad (1.31)$$

Lisaks vaatleme tingimust elastsusmooduli ja venituskoeffitsientide jaoks.

$$\frac{1}{3}(c_{1,2} + c_{1,3} + c_{2,3}) < B_0 < \frac{1}{3}(c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3}); \quad (1.32)$$

On näha, et venituskoeffitsientide positiivsuse tingimus on täidetud, toome ka tulemused ülejäänud võrratuste jaoks. Tulemuste ühikuteks on GPa.

$$(c_{1,1} + c_{2,2} - 2c_{1,2}) = 203.6; \quad (1.33)$$

$$(c_{1,1} + c_{3,3} - 2c_{1,3}) = 242.8; \quad (1.34)$$

$$(c_{2,2} + c_{3,3} - 2c_{2,3}) = 130.7; \quad (1.35)$$

$$(c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3} + 2c_{1,2} + 2c_{1,3} + 2c_{2,3}) = 563.9; \quad (1.36)$$

$$\frac{1}{3}(c_{1,2} + c_{1,3} + c_{2,3}) = 30.6; \quad (1.37)$$

$$B_0 = 58.3; \quad (1.38)$$

$$\frac{1}{3}(c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3}) = 126.8; \quad (1.39)$$

2 Viited

Viited

- [1] P. Ravindran, *et al.*, *J. Appl. Phys.* **84**, 4891 (1998).